

TRI RJEŠENJA JEDNE KVADRATNE DIOFANTSKE¹ JEDNADŽBE

Šefket Arslanagić, Sarajevo, BiH



Rješavanje linearnih Diofantskih jednačbi s dvije ili više nepoznanica ne predstavlja nam neki veliki problem jer tu postoje „uhodani putovi” kako doći do rješenja u skupu N ili u skupu Z . No, rješavanje nelinearnih Diofantskih jednačbi s dvije ili više nepoznanica često predstavlja kudikamo teži posao jer tu nema nekih poznatih metoda njihovog rješavanja nego su bitne ideje koje će nas dovesti do rješenja.

U ovom članku bavit ćemo se rješavanjem jedne kvadratne Diofantske jednačbe čija rješenja pripadaju skupu prirodnih brojeva. Riječ je o sljedećoj jednačbi:

$$2(x+y)+xy=x^2+y^2; (x, y \in N) \quad (1)$$

Sada ćemo prikazati tri različita načina rješavanja ove jednačbe.

Rješenje 1. Dana jednačba je nakon množenja brojem 2 ekvivalentna jednačbi

$$2x^2 + 2y^2 - 2xy - 4x - 4y = 0,$$

odnosno

$$\begin{aligned} (x^2 - 4x + 4) + (y^2 - 4y + 4) + (x^2 - 2xy + y^2) &= 8 \\ \Leftrightarrow (x-2)^2 + (y-2)^2 + (x-y)^2 &= 8. \end{aligned}$$

Broj 8 možemo napisati kao zbroj triju kvadrata na jedan od sljedećih načina:

$$4 + 4 + 0 = 8$$

$$4 + 0 + 4 = 8$$

$$0 + 4 + 4 = 8$$

Dakle, imamo ova tri slučaja:

1° $x - 2 = 2, y - 2 = 2, x - y = 0$, odakle je $x = 4$ i $y = 4$, tj. $(x, y) = (4, 4)$.

2° $x - 2 = 2, y - 2 = 0, x - y = 2$, odakle je $x = 4$ i $y = 2$, tj. $(x, y) = (4, 2)$.

3° $x - 2 = 0, y - 2 = 2, x - y = -2$, odakle je $x = 2$ i $y = 4$, tj. $(x, y) = (2, 4)$.

Znači, imamo sljedeća rješenja jednačbe (1):

$$(x, y) \in \{(4, 2), (2, 4), (4, 4)\}.$$



¹Diofant (3. st.), starogrčki matematičar

Rješenje 2. Dana jednađba (1) ekvivalentna je sljedećoj jednađbi:

$$8(x+y) = 4x^2 - 4xy + 4y^2,$$

odnosno, budući da je $3(x-y)^2 \geq 0$, vrijedi

$$8(x+y) = (x+y)^2 + 3(x-y)^2 \geq (x+y)^2.$$

Dakle, dobivamo:

$$8(x+y) \geq (x+y)^2, \text{ tj.}$$

$$x+y \leq 8. \quad (2)$$

Napišemo li danu jednađbu (1) u obliku:

$$x^2 - xy + y^2 = 2(x+y),$$

a budući da je $2(x+y)$ paran broj, zaključujemo da i broj $x^2 - xy + y^2$ također mora biti paran broj, što je ispunjeno samo u slučaju kada su brojevi x i y oba parni. Zbog (2) u obzir dolaze samo sljedeći parovi:

$$(2, 2), (2, 4), (2, 6), (4, 2), (6, 2), (4, 4).$$

Izravnom provjerom u (1) lako utvrđujemo da u obzir dolaze samo parovi: $(4, 2)$, $(2, 4)$ i $(4, 4)$, što znači da su rješenja jednađbe (1): $(x, y) \in \{(4, 2), (2, 4), (4, 4)\}$.

Rješenje 3. Ovo je rješenje nešto teže, ali je vrlo zanimljivo i poučno. Napišimo danu jednađbu (1) u obliku:

$$x^2 - (y+2)x + (y^2 - 2y) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x - \frac{y+2}{2}\right)^2 - \left(\frac{y+2}{2}\right)^2 + y^2 - 2y = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(-\frac{y+2}{2}\right)^2 + \frac{3y^2 - 12y - 4}{4} =$$

$$\Leftrightarrow \left(x - \frac{y+2}{2}\right)^2 = \frac{-3y^2 + 12y + 4}{4}$$

$$\Leftrightarrow x - \frac{y+2}{2} = \pm \frac{1}{2} \sqrt{-3y^2 + 12y + 4}.$$

Mora biti $-3y^2 + 12y + 4 \geq 0$, odnosno $3y^2 - 12y - 4 \leq 0$, a oдавde:

$$3\left(y^2 - 4y - \frac{4}{3}\right) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow 3\left[(y-2)^2 - 4 - \frac{4}{3}\right] \leq 0$$



$$\Leftrightarrow (y-2)^2 - \frac{16}{3} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow (y-2)^2 \leq \left(\frac{4}{\sqrt{3}}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow |y-2| \leq \frac{4}{\sqrt{3}},$$

odnosno zbog $\frac{4}{\sqrt{3}} = \frac{4}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$:

$$|y-2| \leq \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{4\sqrt{3}}{3} \leq y-2 \leq \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

$$\Leftrightarrow 2 - \frac{4\sqrt{3}}{3} \leq y \leq 2 + \frac{4\sqrt{3}}{3},$$

a odavde zbog $y \in N$:

$$y \in \{1, 2, 3, 4\}.$$

Sada imamo ova četiri slučaja:

$$1^\circ \quad y=1 \Rightarrow 2(x+1)+x=x^2+1$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 3x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{13}{4}$$

$$\Leftrightarrow x - \frac{3}{2} = \pm \frac{1}{2}\sqrt{13}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{13}}{2} \notin N.$$

Dakle, ovaj slučaj otpada.



$$\begin{aligned}
 2^\circ \quad y = 2 &\Rightarrow 2(x+2) + 2x = x^2 + 4 \\
 &\Leftrightarrow x^2 - 4x = 0 \\
 &\Leftrightarrow x(x-4) = 0 \\
 &\Leftrightarrow x = 0 \vee x = 4.
 \end{aligned}$$

Budući da je $x = 0 \notin N$, to je $x = 4$, pa je rješenje jednačbe (1): $(x, y) = (4, 2)$.

$$\begin{aligned}
 3^\circ \quad y = 3 &\Rightarrow 2(x+3) + 3x = x^2 + 9 \\
 &\Leftrightarrow x^2 - 5x + 3 = 0 \\
 &\Leftrightarrow \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} + 3 = 0 \\
 &\Leftrightarrow \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{13}{4} \\
 &\Leftrightarrow x - \frac{5}{2} = \pm \frac{1}{2}\sqrt{13} \\
 &\Leftrightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{13}}{2} \notin N.
 \end{aligned}$$

Znači da i ovaj slučaj otpada.

$$\begin{aligned}
 4^\circ \quad y = 4 &\Rightarrow 2(x+4) + 4x = x^2 + 16 \\
 &\Leftrightarrow x^2 - 6x + 8 = 0 \\
 &\Leftrightarrow (x-4)(x-2) = 0 \\
 &\Leftrightarrow x = 4 \vee x = 2.
 \end{aligned}$$

Za $x = 4$ dobivamo iz (1): $y = 4$, a za $x = 2$ slijedi iz (1) da je $y = 4$, tj.

$$(x, y) \in \{(4, 4), (2, 4)\}.$$

Dakle, iz slučaja 2° i 4° dobivamo rješenja dane jednačbe (1):

$$(x, y) \in \{(4, 2), (2, 4), (4, 4)\}.$$

Literatura

1. Arslanagić, Š., *Matematika za nadarene*, Bosanska riječ, Sarajevo, 2005.

